# Resolução numérica real de sistemas não lineares e não quadrados

## Definições

Deixando mais claro do que esse texto se trata:

### Resolução numérica real

Significa encontrar valores reais que sejam solução do sistema. Para isso partimos de um chute inicial e vamos melhorando-o. Vamos assumir que o chute inicial é dado pelo usuário, então basta discutir como melhorar o chute inicial e quando devemos parar.

### Sistema não linear

Um conjunto de equações não lineares, ou seja, equações geralmente complicadas (não é somente ).

### Sistema não quadrado

Não possui o mesmo número de variáveis e equações. Sistemas assim geralmente possuem infinitas soluções ou até mesmo nenhuma.

## Linearizando

O ponto principal é como vamos melhorar o nosso chute inicial. O primeiro passo será linearizar o sistema, deixando-o bem mais simples de ser resolvido.

A linearização será feita na região do chute inicial e para isso precisamos da primeira derivada do nosso sistema. Mas como o conceito de derivada se aplica num sistema? Podemos olhar o sistema como se fosse uma função :

A “derivada” dessa função na verdade é uma coleção de derivadas parciais, uma para cada variável e expressão, formando uma matriz:

Essa matriz recebe o nome de Jacobiana e, no caso geral, é dada por

Assim, basta linearizar nosso sistema (função f) no chute inicial:

Nosso trabalho agora é resolver essa expressão, para facilitar podemos reescrever como:

Perceba que isso é um sistema linear , onde A e b são matrizes numéricas. Parece relativamente fácil resolver, não? O problema é que esse sistema não é quadrado. Veja pelo nosso exemplo:

## Qual solução?

O sistema linear anterior tem infinitas soluções (são menos equações que incógnitas). Qual delas é a correta? Ou ainda, qual delas é a melhor?

Veja que a solução do sistema linear anterior representa o quanto vamos corrigir o chute inicial. Veja também que chegamos nesse sistema linearizando o sistema original no chute inicial. Como a linearização geralmente só faz sentido para valores próximos do inicial faz sentido buscarmos a menor solução, ou seja, os menores valores para .

Em resumo, queremos minimizar o módulo do vetor , ou seja, minimizar (sim, um problema de mínimos quadrados).

## Trabalhando o sistema linear

Podemos aplicar o processo de escalonamento no nosso sistema linearizado, ele simplifica o sistema e permite ver o que precisamos para aplicar a restrição dos mínimos quadrados.

Escalonar é basicamente aplicar alterações no sistema de modo a deixar as primeiras colunas como se fossem de uma matriz identidade e, claro, sem alterar suas soluções. Aqui vamos aplicar o escalonamento com pivoteamento completo, ou seja, trocando linhas e colunas.

Obs.: como estamos trabalhando com números num computador, é melhor buscar o maior valor absoluto possível para os pivôs.

Vamos pegar nosso exemplo com chutes iniciais :

Assim, fica mais claro que temos uma variável independente e, além disso, a dependência de com ela.

Num caso mais geral, teremos variáveis independentes, permitindo escrever o sistema na forma escalonada:

Onde são matrizes coluna com linhas.

## Otimizando a resposta

Podemos agora determinar o valor das variáveis independentes aplicando a restrição de minimizar os valores das variáveis.

Para isso, basta que as derivadas nas variáveis independentes sejam nulas. Nesse caso em específico, basta fazer:

Assim, obtivemos uma equação de primeiro grau em , que pode ser facilmente resolvida.

No caso geral, teremos variáveis independentes e a derivada parcial em cada uma delas deve ser nula, então caímos num sistema linear e quadrado. Depois de isolar corretamente os termos, ele pode ser assim representado:

## Finalizando

Depois de resolver esse último sistema linear e quadrado, temos nossas variáveis independentes. Com elas, obtemos nossas variáveis dependentes:

Com isso, podemos obter o nosso chute melhorado:

## Verificando

Será que o chute foi realmente melhorado? Basta ver:

Ou seja, ficamos muito mais próximo do zero! Objetivo atingido. Basta melhorar ainda mais o chute, até chegar perto suficiente do zero ou ficarmos cansados de fazer conta.

Na próxima iteração, chegamos a:

## Resumo

Usamos um exemplo durante todos os passos, mas tudo pode ser generalizado (boa parte da generalização já foi dada também). Mas a ideia básica é:

1. Pegar um sistema não linear e não quadrado, com um chute inicial
2. Linearizar o sistema perto do chute inicial
3. Escalonar o sistema, explicitando as dependências entre as variáveis
4. Obter um sistema linear e quadrado para as variáveis independentes
5. Obter os valores das variáveis independentes
6. Obter os valores das dependentes
7. Obter o novo chute
8. Repetir a partir do passo 2